一般のultradifferentiable classにおける擬微分作用素の理論について(偏微分方程式の解の構造の研究)

松本, 和一郎

数理解析研究所講究録
531巻 1984年 117-142

一般の ultradifferentiable class における 擬微分作用素の理論について.
(On theories of pseudo-differential operators of general ultradifferentiable class.)

京大理学部 松本和一郎 (Waichiro MATSUMOTO)

§1. Introduction. C^∞ (又は $\mathcal{B}$) における擬微分作用素の理論はよく研究されている。(J.J. Kohn and L. Nirenberg [10], L. Hörmander [7], H. Kumano-go [16], [17] 他.) 一方. Gevrey classes, 特に analytic class においてもそれはかなり研究されている。(L. Boutet de Monvel and P. Krée [3], L. R. Volevič [27], S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6], L. Boutet de Monvel [2], K. Taniguchi [25], F. Treves [26], M.S. Baouendi, C. Goulaouic and G. Métivier [1] 他.) しかしながら. C^∞ においては. 特に H. Kumano-go の一連の仕事により擬微分作用素とその表象の漸近展開の形式和の空間の構造が十分に解明されたのに反して. Gevrey classes においてはこれらの構造は.

なお十分に解明されたとはいいがたい。たとえば、Gevrey classes における擬微分作用素は $-\infty$ 次の operators を modulo として star algebra を成すことは多くの人々が指摘しているが、modulo class なしに exact に algebra にならないのであろうか？ 更に $-\infty$ 次の operators を modulo として star algebra になることの証明についても、必ず作用素の積の表象がとるであろう漸近展開を想定し、その漸近展開をとる表象を別につくり、作った表象と本来の積の表象との差が $-\infty$ 次の作用素の表象になることを示している。作用素の積について論じるのであるから、本来その漸近展開はもちださなくても証明できるのではないか？ 等々。
上の疑問のうち前者は否定的であることを示せる。（ただし、"擬微分作用素"の定義は多様でありうるから、あくまで、"標準的"な定義を採用した場合についてである。）他方後者は肯定的であると信じ、講演でもそのように報告したが見落としがあって、今のところ不明である。もちろん、ある場合には可能なのだが、その証明できた場合というのが、Gevrey class を含まないのみならず、いわゆる弱分離性（後出）も満たさない class であり、いささかとまどっている。

話が少し前後したが、構造を解明したいという目的のために、あえて Gevrey classes に限らず一般の ultradifferen-

tiable classes $\mathcal{B}\{M_n\}$（定義は後出）において擬微分作用素理論を試み．それがうまくいくためには $\{M_n\}$ に対してどのような条件をおけばよいかを調べる。
なお，Gevrey classes 以外に（偏）微分方程式論において必要となる ultradifferentiable classes（= ul. d. classes）があるのかということについては，ささやかながらあると，筆者は考えている。（W. Matsumoto [19]，[20] 等．）しかしながら，本稿においては応用のことは一応考えに入れないで論をすすめる。

§2. 記号，定義及び仮定． 本稿では C，R を擬微分作用素（= ps. d. op.）の表象にのみ依存する定数として用いる。それらは行ごとに異る値になってもよいとする。

$K \subset\subset \Omega$ は K が Ω の compact subset で $\partial K \cap \partial\Omega = \emptyset$ を意味する。$K \to \Omega$ は列 $\{K\}$ が $K \subset\subset \Omega$ かつ $\bigcup K = \Omega$ を満たすことを意味する。

$\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$ とおく。α，α'，$\alpha^{(k)}$ $(1 \leq k \leq n) \in \mathbb{Z}_+^{\ell}$ に対して $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$，$\alpha \pm \alpha' = (\alpha_1 \pm \alpha_1', \cdots, \alpha_\ell \pm \alpha_\ell')$，$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_\ell!$，$\alpha \geq \alpha'$ if $\alpha_j \geq \alpha_j'$ $(\forall j)$，$\binom{\alpha}{\alpha^{(k)}}_n = \alpha!/\alpha^{(1)}! \cdots \alpha^{(n)}!$ $\left(\sum_k \alpha^{(k)} = \alpha\right)$，$\binom{\alpha}{\alpha'} = \alpha!/\alpha'!(\alpha-\alpha')!$ $(\alpha \geq \alpha')$，$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right)^{\alpha_\ell}$，$D_x^\alpha = (-\sqrt{-1})^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$，$p_{(\alpha)}^{(\beta)} = D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p(x,\xi)$ とおく。

$|\xi| = \left(\sum_{j=1}^{\ell} \xi_j^2\right)^{1/2}$，$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ とおこう。これらは

実軸のある錐近傍内で analytic である。

$\mathcal{F}[f] = \hat{f}(\xi) \equiv \int e^{-\sqrt{-1}x\cdot\xi} f(x)\,dx$, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \equiv \int e^{\sqrt{-1}x\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,đ\xi$

($đ\xi = (2\pi)^{-l}d\xi$) とおく。 ある函数空間 X の任意の元 φ の Fourier 変換が可能のとき、φ の Fourier image $\hat{\varphi}$ 全体のなす空間を $\mathcal{F}[X]$ とかく。 $\mathcal{F}[X]$ の dual space の元 f に対して、f の Fourier image $\hat{f}$ を $\langle \hat{f}, \varphi\rangle \equiv \langle f, \hat{\varphi}\rangle$ で定義する。 $\hat{f}$ は X の dual space の元である。

$a(x,\xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{2l})$ が

$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^{\,l},\ \exists C(\alpha,\beta) > 0$

$$|a^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{m} \quad , \ (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2l} ,$$

をみたすとき、$e^{-\sqrt{-1}x\cdot\xi}a(x,\xi)$ の振動積分を次のように定義する。

$$Os\text{-}\iint e^{-\sqrt{-1}x\cdot\xi}a(x,\xi)\,dx\,đ\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-\sqrt{-1}x\cdot\xi}\chi(\varepsilon x)\chi(\varepsilon\xi)\,a(x,\xi)\,dx\,đ\xi.$$

ここに χ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{l})$ の元で $\chi(0) = 1$ をみたすものである。振動積分は χ のとり方に依存しない。この詳しい性質は、H. Kumano-go [17] をみられたい。

正数列 $\{M_n\}$, 正数 R 及び $\mathbb{R}^l$ の集合 Ω に対して

$\mathcal{B}\{M_n\}_R(\Omega) = \{ f(x) \in C^\infty(\Omega) \mid \exists C;$ depending on f s.t.

$|f_{(\alpha)}(x)| \leq C R^{|\alpha|}M_{|\alpha|}$ in Ω for $\forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^{\,l}$ $\}$

$\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}_R = \{ f(x) \in \mathcal{D}^{\infty}_{L^2}(\mathbb{R}^l) \mid \sum_{\alpha}\|f_{(\alpha)}\|^2_{L^2}/(R^{|\alpha|}M_{|\alpha|})^2 < \infty \}$

とおく。前者は Banach sp.，後者は Hilbert sp. となる。

Class $\{M_n\}$ の ul. d. spaces を次のように定義する。

$$\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega) \equiv \underset{R\to\infty}{\text{ind-lim}}\ \mathcal{B}\{M_n\}_R(\Omega),$$

$$\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega) \equiv \underset{K\to\Omega}{\text{proj-lim}}\ \underset{R\to\infty}{\text{ind-lim}}\ \mathcal{B}\{M_n\}_R(K),$$

$$\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega) \equiv \underset{K\to\Omega}{\text{ind-lim}}\ \underset{R\to\infty}{\text{ind-lim}}\ (\mathcal{B}\{M_n\}_R(K)\cap\mathcal{D}(K)),$$

$$\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\} \equiv \underset{R\to\infty}{\text{ind-lim}}\ \mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}_R .$$

特に $M_n = n!^{\nu}$ $(\nu>0)$ が ν 次の Gevrey class を与える。更に $\nu=1$ であれば real analytic class となる。$\Omega=\mathbb{R}^l$ のとき，(Ω) を略す。又，特に Ω を明示する必要のないときも (Ω) を略す。これらの空間及びその dual spaces の位相は，H. Komatsu [12] を見られたい。特に，$\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\} = \underset{R\to\infty}{\text{proj-lim}}\ \mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}_R$ で，Fréchet space である。

ul. d. sp.'s の研究に関しては S. Mandelbrojt [18] に組織的に述べられている。ここでは，その他の結果も含めて，必要な事柄をまとめておく。

Kolmogoroff の定理により，$\mathcal{B}\{M_n\}$, $\mathcal{D}\{M_n\}$ においては $\{M_n\}$ を対数的に凸なものに，空間をかえることなくとりかえられる。更に，Gorny の定理により，$\liminf (M_n/n!)^{1/n} > 0$ ならば，$\mathcal{E}\{M_n\}$ においても同様である。（後にわれわれは non-quasianalytic のための条件 $\sum_n M_n^{-\frac{1}{n}} < \infty$ を仮定するから $\liminf (M_n/n!)^{1/n} > 0$ は自然に成り立つ。(W. Rudin [23].)

したがって次の仮定を導入するのはなかまうまい。

仮定1. $\{M_n\}$ は対数的に凸である。

このとき次のことが成り立つ。

命題 2.1. i) $\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$, $\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ は algebra を成す。$\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ の元と $\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega)$ の元の積は $\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega)$ に、$\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$ の元と $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}(\Omega)$ の元の積は $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}(\Omega)$ にそれぞれ属する。

ii) $\{M_n\}$ が次の条件

(R) $\quad \exists C>0, \quad (M_m/m!)^{1/m} \leq C(M_n/n!)^{1/n} \quad (1 \leq m \leq n)$.

をみたすならば、$\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ は zero にならない元での除法に、$\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$ は一様に zero にならない元での除法に閉じている。

iii) $\{M_n\}$ が次の条件

(K) $\quad \exists C>0, \quad (M_m/m!)^{1/(m-1)} \leq C(M_n/n!)^{1/(n-1)} \quad (2 \leq m \leq n)$.

をみたすならば、$\mathcal{E}\{M_n\}$ と $\mathcal{B}\{M_n\}$ はそれぞれ合成函数をつくること、陰函数の定理、常微分方程式の解を求めることに閉じている。

証明に関しては、i) は容易、ii) については W. Rudin [23], iii) については H. Komatsu [13], [14], [15] をみられたい。

$\lim_n (M_n)^{1/n} = \infty$ としよう。(これは後で non-quasianalytic のための条件を仮定すると、自然に満たされる。) $\{M_n\}$ の元は有限個を変更しても空間としては同じものを与えるから、$\{M_n\}$ は対数的に凸のみならず、単調増大かつ $M_0 = 1$ として

よい。$a_n = \log M_n$ とおこう。次の函数は well-defined である。

$$T(r) = \sup_{n \geq 0} r^n / M_n \quad (r>0), \quad H(t) = \sup_{n \geq 0} \{nt - a_n\}.$$

$H(t)$ は単調増大，下に凸な折線である．したがって右微分可能である。$(\frac{d}{dt})_r$ を右微分として

$$h(t) = (\tfrac{d}{dt})_r H(t)$$

とおこう。次の関係式が成り立つ。

$$T(r) = \exp H(\log r), \quad r \cdot (\tfrac{d}{dr})_r T(r) / T(r) = h(\log r).$$

実は，$T(r)$ 及び $H(t)$ の定義において sup は $n = h(\log r)$, $n = h(t)$ で max として与えられる。$\{M_n\}$ の対数的凸性から次の等式が成り立つ。

$$(*) \quad M_n = \sup_{r>0} r^n / T(r), \quad a_n = \sup_t \{nt - H(t)\}.$$

この sup はそれぞれ，$r = M_{n+1}/M_n$, $t = a_{n+1} - a_n$ で与えられる。

$\{\tilde{M}_n\}$ がある正数 C_1, R_1, C_2, R_2 に対して，

$$C_1 R_1^n M_n \leq \tilde{M}_n \leq C_2 R_2^n M_n$$

をみたすとき，$\{\tilde{M}_n\}$ は $\{M_n\}$ と同等であるという。$\{M_n\}$ と $\{\tilde{M}_n\}$ は同じ ul. d. sp. を与える。

$\tilde{T}(r)$ がある正数 C_1, R_1, C_2, R_2 に対して

$$C_1 T(r/R_1) \leq \tilde{T}(r) \leq C_2 T(r/R_2)$$

をみたすとき，$\tilde{T}(r)$ は $T(r)$ と同等であるという。$T(r), \tilde{T}(r)$

から前頁(*)の式で M_n, $\hat{M}_n$ を定義すると、$\{M_n\}$ と $\{\hat{M}_n\}$ は同等になる。ul.d.sp. の定義のしかたにより、われわれは Class $\{M_n\}$ の ul.d.sp を考察するにあたり、$\{M_n\}$, $T(r)$ のかわりに同等な $\{\hat{M}_n\}$, $\tilde{T}(r)$ を用いてもよい。

$$L^2[W(\xi)] = \{g(\xi)\ ;\ \text{measurable かつ } g(\xi)W(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^l)\}$$

とおこう。

<u>命題 2.2.</u>

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}] = \text{ind-}\lim_{R\to\infty} L^2[T(\langle\xi\rangle/R)]$$

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}] = \text{proj-}\lim_{R\to\infty} L^2[T(\langle\xi\rangle/R)^{-1}].$$

さて、これから ps.d.op. の理論を考察するにあたり、$\{M_n\}$ に課されるであろう条件を列挙する。可微分性、弱分離性、分離性で、しだいにより強い条件となる。$\limsup a_n/g(n) < \infty$ のとき $a_n = O(g(n))$, $\lim a_n/g(n) = 0$ のとき $a_n = o(g(n))$ とかく。

<u>命題 2.3.</u> (可微分性) 次の条件はすべて同値である。

(D.0) $\forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^l$, $f \in \mathcal{B}\{M_n\}$ ならば $f^{(\alpha)} \in \mathcal{B}\{M_n\}$.

(D.1) $\exists R > 1$, $M_{n+1} \leq R^n M_n$ $(n \gg 1)$. (可微分条件)

(D.2) $\log M_n = O(n^2)$. (D.3) $\log(M_{n+1}/M_n) = O(n)$.

(D.4) $\exists \kappa > 0$, $T(r) = r^{\kappa \log r}$ $(r \gg 1)$. (D.4') $\liminf_t H(t)/t^2 > 0$

(D.5) $\liminf h(t)/t > 0$.

(D.6) $\forall m \in \mathbb{Z}_+$, $\exists R > 1$, $T(r) \geq r^m T(r/R)$ $(r \gg 1)$.

命題 2.4.（弱分離性）．次の条件はすべて同値である。

(W.S.1) $\exists R>1$, $\exists\{N_n\}$, $M_{n+m} \leq R^n M_n N_m$ $(n, m \gg 1)$（弱分離条件）.

(W.S.2) $\forall m>0$, $\lim_{n\to\infty} (M_{n+m}/M_n)^{1/n} = 1$.

(W.S.3) $\log M_n = o(n^2)$. (W.S.4) $\log(M_{n+1}/M_n) = o(n)$.

(W.S.5) $\forall k>0$, $\exists r_0>0$, $T(r) \geqq r^{k\log r}$ $(r \geqq r_0)$.

(W.S.5′) $\lim H(t)/t^2 = \infty$. (W.S.6) $\lim h(t)/t = \infty$.

(W.S.7) $\exists R>1$, $\forall m>0$, $T(r) \geqq r^m T(r/R)$ $(r \gg 1)$.

命題 2.5.（分離性）次の二つの条件は同値である。

(S.1) $\exists R>1$, $M_{n+m} \leq R^{n+m} M_n M_m$ $(n, m \gg 1)$（分離条件）

(S.2) $\exists R>1$, $T(r) \geqq T(r/R)^2$ $(r \gg 1)$.

命題 2.6. 条件 (S.1) の下に次の同値なことがらが成り立つ。

(S.3). $\exists \nu>0$, $M_n \leqq n!^{\nu}$ $(n \gg 1)$.

(S.4) $\exists \nu>0$, $M_{n+1}/M_n \leq n^{\nu}$ $(n \gg 1)$.

(S.5) $\exists k>0$, $T(r) \geqq \exp r^k$, $(r \gg 1)$.

命題 2.3 は S. Mandelbrojt [18] に、命題 2.4～2.6 は W. Matsumoto [21] に与えられた。

われわれは推論を明快にするために non-quasianalytic のための（必要十分）条件をも仮定しよう。

仮定2. $\{M_n\}$ は non-quasianalyticity 条件をみたす：

$$(\mathrm{C.D})\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(M_n)^{-1/n}<\infty.$$

注意. 仮定2により. analytic class を含む quasi-analytic class を排除したが. 以下のほとんどの結果は $\liminf (M_n/n!)^{1/n}>0$ である限り（他の仮定と矛盾しない限り）quasianalytic classでもなりたつ。

もちろん、$\mathcal{D}\{M_n\}=\{0\}$ であるから. 証明には注意を要す。

§3. ul.d. class における Ps.d.op's に要求する性質と、漸近展開にあらわれる形式表象の定義.

C^∞ における擬微分作用素といっても、目的に応じて. その定義は異る。しかし. その本質は共通であるから. ここでは. H. Kumano-go [17] でとりあつかわれている. R^l に標準化されたものを規準にとり. C^∞ における擬微分作用素というときは、それのみを考える。更に. $\rho=1, \delta=0$ とする。

$\rho-\delta<1$ のときは　　$-\infty$ 次の作用素の値域が表象の滑らかさを保たない等　　　　　　より複雑となる。

実体は今から定義するのであるが. 記号として次のものを導入する。$\mathcal{B}\{M_n\}$ 上の擬微分作用素の全体を $\mathcal{S}[M_n]$, その表象の全体を $S[M_n]$, 表象の漸近展開の形式和の全体を $\mathcal{S}[M_n]$, 形式和のうち特に ξ について正斉次のものの全体を $\mathcal{S}_{hom}[M_n]$ とかく。 $S[M_n]$ の元 $p(x,\xi)$ が $[M_n]$ の意味で $\mathcal{S}[M_n]$ の元 $\sum_i p_i(x,\xi)$

を漸近展開にもつことを $p(x,\xi) \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i(x,\xi)$ とかく。このとき $p(x,\xi)$ を true symbol, $\sum p_i(x,\xi)$ を formal symbol と呼ぶ。なお、C^∞（又は $\mathcal{B}$）上の ps.d.op's に関する記号としては上記のものから $[M_n]$ をとったものを用いる。

天下りではあるが、
（次の七つを $\tilde{S}[M_n]$, $S[M_n]$, $\mathcal{S}[M_n]$ に要請しよう。

I. $\tilde{S}[M_n]$, $S[M_n]$, $\mathcal{S}[M_n]$ は $\tilde{S}(=\tilde{S}_{1,0})$, $S(=S_{1,0})$, $\mathcal{S}$ のそれぞれ subset である。又、$p \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i$ は $p \sim \sum p_i$ を内包する。

II. $\tilde{S}[M_n]$ は $\mathcal{B}\{M_n\}$ 係数の微分作用素をすべて含む。

III. $\tilde{S}[M_n]$ の元は $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ 上、又 $\mathcal{D}\{M_n\}$ から $\mathcal{E}\{M_n\}$ へ有界である。（III′ $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ から $\mathcal{D}_{L^2}\{M_{n+l_0}\}$ へ、又、$\mathcal{D}\{M_n\}$ から $\mathcal{E}\{M_{n+l_0}\}$ へ有界である。l_0 は op. の order と次元 l のみによって決まる定数である。）

IV. $\tilde{S}[M_n]$ は star algebra を成す。
（必要ならば $\tilde{S}^{-\infty}[M_n]$ を modulo として。）

V. $\tilde{S}^{-\infty}[M_n]$ の元は $\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}$ から $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ へ、又 $\mathcal{E}'\{M_n\}$ から $\mathcal{E}\{M_n\}$ へ有界である。
（V′ $\mathcal{D}'_{L^2}$ から $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ へ、$\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}$ から $\mathcal{D}^\infty_{L^2}$ へ、又 $\mathcal{E}'$ から $\mathcal{E}\{M_n\}$ へ、$\mathcal{E}'\{M_n\}$ から $\mathcal{E}$ へ有界である。）

VI. $\mathcal{S}[M_n]$ は operator product 及び formal adjoint をとることに閉じている。ここに $\mathcal{S}[M_n]$ の元 $\sum p_i(x,\xi)$, $\sum q_i(x,\xi)$ の operator product とは $(\sum p_i)\circ(\sum q_i) = \sum r_i$, $r_i(x,\xi) = \sum_{j+k+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} p_j^{(\alpha)} q_{k(\alpha)}$,

formal adjoint とは $\sum p_i(x,\xi) \in \mathcal{S}[Mn]$ に対して $\sum s_i(x,\xi)$,
$$s_i(x,\xi) = \sum_{j+|\alpha|=i} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} \overline{p}_{j\,(\alpha)}^{(\alpha)}(x,\xi)$$
のことである。

VII、$\mathcal{S}[Mn]$ の任意の元に対して、それを $[Mn]$ の意味で漸近展開にもつ $\mathscr{S}[Mn]$ の元が存在する。

以上の七つは $\{Mn\}$ 及び $[Mn]$ をとればすべて C^∞ (又は $\mathcal{B}$) 上の ps. d. op. として成り立っている。

上の七つのうち I. は ul. d. class における ps. d. op. としては不適当にも思われる。なぜならば、ul. d. class に対しては、必ずある種の ∞ 次の operator が作用可能だからである。しかし、もし ∞ 次の op. も含む ps. d. op. の理論がうまくゆくならば、有限次の ps. d. op's の全体も、その subclass として、理論がうまくゆくはずである。それゆえ、ここでは理論の可能性をさぐるという観点から、有限次の op's に限ることにする。

さて、上記七つのうち、II〜V は $\mathscr{S}[Mn]$ で閉じた性質、VI は $\mathcal{S}[Mn]$ で閉じた性質、VII が $\mathscr{S}[Mn]$ (すなわち $\mathcal{S}[Mn]$) と $\mathcal{S}[Mn]$ を結ぶものである。したがって、三つのグループをそれぞれ独立に扱えるとよいのだが、なかなかうまくいかない。$\mathcal{S}[Mn]$ に対する要請 VI は、さいわいに独立して示せるのでまず $\mathcal{S}[Mn]$ の定義として、VI を示そう。$\mathcal{S}[Mn]$ の定義としては以下のもの (又は注意 I. によるもの) が自然であろう。

定義 3.1. $\sum p_i(x,\xi) \in S^m[M_n]$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists r_0>0$, $\exists R>0$, $\exists C>0$ depending on $\sum p_i$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^l$

$$|p_{i(\alpha)}^{(\beta)}(x,\xi)| \le C R^{i+|\alpha|+|\beta|} M_{i+|\alpha|}\, \beta!\, \langle\xi\rangle^{m-i-|\beta|}$$

$$\text{for } (x,\xi) \in R^l \times \{\langle\xi\rangle \ge r_0\}.$$

注意 1 上は L. Boutet de Monvel and P. Krée [3] 流のものである。他方、F. Treves [26], S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6] 流に r_0 と i,β に依存させて $d\,\Theta(i+|\beta|)$ におきかえたものについても、§3 の以下の定理は成り立つ。ここに $\Theta(n)=(M_n)^{1/n}$, d は $\sum p_i$ に依存する正定数である。

注意 2. ξ に関する上の評価は実軸のある錐近傍に holomorphic に 拡張できることを意味している。これは一見強すぎそうにみえるが（C^∞ の場合と比較してみよ!）VI のためにはこの analytic estimate が必要である。実際、$l \ge 2$ のとき、本質的な場合をカバーする付加条件のもとに、VI のためには $\beta!$ を $\limsup (L_n/n!)^{1/n} = \infty$ なる $\{L_n\}$ を用いて $L_{|\beta|}$ には置きかえられないことを示せる。（$\limsup (L_n/n!)^{1/n} < \infty$ は、L_n が $n!$ と同等かより"小さい"ことを示している。）

定理 3.1. (Formal Calculus) 条件 (R) が $C=1$ で成り立つとしよう。このとき次のことが成り立つ。

i) $S[M_n]$ は operator product 及び formal adjoint をとることに閉じた algebra である。

ii) Elliptic operator (ie $\exists C>0$, $|p_0(x,\xi)|\geq C|\xi|^m$ $(|\xi|\gg 1)$) に対して operator product に関する逆元が存在する。

iii) $\sum_{j=0}^{m} a^j(t;x,\xi)D_t^{m-j}$ を $a^j\in\mathcal{E}\{M_n\}([0,T],S^j[M_n])$, $a^0=1$ を係数とする常微分作用素とする。$\sum_{j=0}^{m} a^j_0(t,x,\xi)\lambda^{m-j}=0$ が $\{\lambda^1_k(t;x,\xi)\}_{k=1}^{m(1)}$, $\{\lambda^2_k(t;x,\xi)\}_{k=1}^{m(2)}$ $(m(1)+m(2)=m)$ の互いに分離された2組に分けられる根をもつとしよう。このとき、$b^{h,j}\in\mathcal{E}\{M_n\}([0,T];S^j[M_n])$, $(h=1,2,\ 1\leq j\leq m(h))$, $b^{h,0}=1$ があって、$\sum_{j=0}^{m(h)} b^{h,j}_0(t;x,\xi)\lambda^{m(h)-j}=0$ は根 $\{\lambda^h_k(t;x,\xi)\}_{k=1}^{m(h)}$ $(h=1,2)$ をもつ。$\{\sum b^{1,j}(t;x,\xi)D_t^{m(1)-j}\}\circ\{\sum b^{2,j}(t;x,\xi)D_t^{m(2)-j}\}=\sum a^j(t;x,\xi)D_t^{m-j}$ が成り立つ。

以上は L. Boutet de Monvel and P. Krée [3], T. Nishitani [22] と同様にして示せる。

§4. $S^m[M_n]$, $S^{-\infty}[M_n]$ の定義と性質 III, IV 及び VII.

定義3.1から $S^m[M_n]$ を次のように定義するのは自然である。

定義4.1. $p(x,\xi)\in S^m[M_n]$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists r_0>0$, $\exists R>0$, $\exists C>0$ depending on $p(x,\xi)$, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^{\ell}$ $\exists C_\beta>0$

$$|p^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi)|\leq\begin{cases} C R^{|\alpha|+|\beta|}M_{|\alpha|}\beta!\langle\xi\rangle^{m-|\beta|} & \text{in } \mathbb{R}^\ell\times\{\langle\xi\rangle\geq r_0\}\\ C_\beta R^{|\alpha|}M_{|\alpha|} & \text{in } \mathbb{R}^\ell\times\{\langle\xi\rangle< r_0\}\end{cases}$$

定義4.1の下には、残念ながら $S[M_n]$ $(=\bigcup_{m\in\mathbb{R}}S^m[M_n])$ は modulo class なしには star algebra と成らない。その：

とは $p(\xi)=(1+|\xi|^2)$ とある $\mathcal{B}\{M_n\}$ の元 $q(x)$ が

$$(p\circ q)^{(n-s,0,\cdots,0)}_{(s,0,\cdots,0)} \geqq C\,2^{-n}(n-s)\,\underset{\sim}{M_n}\,\langle\xi\rangle^{-2-(n-s)}$$

が成り立つようにとれることによる。この場合、この悪い評価をもたらすのは $p\circ q = Os\text{-}\iint e^{-\sqrt{-1}y\cdot\eta}p(\xi+\eta)q(x+y)\,dy\,đ\eta$ の $\xi+\eta\sim 0$ の積分である。他方上の反例においても、

$$|(p\circ q)^{(\beta)}_{(\alpha)}| \leqq CR^{|\alpha|+|\beta|}M_{|\alpha|}\beta!\,\langle\xi\rangle^{\underset{\sim}{-2}}$$

は成り立っていることは注目に値する。このことに示唆されて、modulo class としての $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ を次のように定義しよう。

定義 4.2. $p(x,\xi)\in\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists R>0$, $\forall\beta\in\mathbb{Z}_+^{\ l}$, $\exists C_\beta>0$, $\forall N\in\mathbb{Z}_+$, $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^{\ l}$,

$$|p^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi)| \leqq C_\beta R^{N+|\alpha|}M_{N+|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-N} \quad \text{for } (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2l}.$$

注意 1. 弱分離条件 (W.S.1) を $\{M_n\}$ に仮定すれば上の定義は

$$|p^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi)| \leqq C_\beta R^{N+|\alpha|}M_{N+|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-N-|\beta|} \quad \text{for } (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2l}$$

と同値である。

注意 2. 上の定義は次の評価と同値である。

$\exists R>0$, $\forall\beta\in\mathbb{Z}_+^{\ l}$, $\exists C_\beta>0$, $\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^{\ l}$

$$|p^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi)| \leqq C_\beta\langle\xi\rangle^{|\alpha|}\,T(\langle\xi\rangle/R)^{-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^{2l}.$$

注意 3. 定義 4.1, 4.2 にあらわれる C_β を表象に依存しない $\{L_n\}$ で $\liminf (L_n/n!)^{1/n}>0$ を満たすものを用いて $C_\beta = CR^{|\beta|}L_{|\beta|}$

で与えられるとしても一つの閉じた体系ができる。但し、この場合には注意 1 のような同値性は成り立たない。
なお、定義 4.2 においては $\{L_n\}$ が条件 (C.D) を満たすとする。

定義 3.1 と 4.1 より漸近展開の定義を次のように定義しよう。

定義 4.3. $p(x,\xi) \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i(x,\xi)$

$\overset{def}{\iff}$ $\exists r_0>0$, $\exists R>0$, $\exists C>0$ depending on p and $\sum p_i$, $\forall N \in \mathbb{Z}_+$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^l$,

$$\left| \left(p(x,\xi) - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x,\xi)\right)_{(\alpha)}^{(\beta)} \right| \leq C R^{N+|\alpha|+|\beta|} M_{N+|\alpha|}\, \beta!\, \langle\xi\rangle^{m-N-|\beta|}$$

$$\text{for } (x,\xi) \in \mathbb{R}^l \times \{\langle\xi\rangle \geq r_0\}.$$

注意 定義 3.1 の注意 1 に対応して定義 4.1 及び 4.3 の r_0 を $d\,\Theta(N+|\beta|)$ に変更しても §4 の結果はすべて成り立つ。

さて、$S[M_n]$（したがって $\mathcal{S}[M_n]$）が定ったので、性質 III から調べよう。II により III が成り立つには可微分条件 (D.1) が必要である。次の定理が成り立つ。この場合、ξ に関する微分の規則性はいらない。

定理 4.1. i) $\mathcal{S}^m[M_n]$ の元は $\mathcal{D}_{L^2}\{M_{n+2}\}$ から $\mathcal{D}_{L^2}\{M_{n+m+2}\}$ へ, $\mathcal{D}'_{L^2}\{M_{n+m+2}\}$ から $\mathcal{D}'_{L^2}\{M_{n+2}\}$ へ、又 $\mathcal{B}\{M_n\}$ から $\mathcal{B}\{M_{n+l_0+m}\}$ へ有界である。ここに $l_0 = 2[\frac{l}{2}]+3$ である。

ii) $\{M_n\}$ が条件 (D.1) を満たすとしよう。このとき $\mathcal{S}[M_n]$ の元は $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ 及び $\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}$ 上，又 $\mathcal{B}\{M_n\}$ 上有界である。

性質IVにうつろう。これは $S[M_n]$ 内部の性質であるが未だ $S[M_n]$ 内部の証明は確立していない。われわれは性質VIIを援用してIVを得ることができる。そのために、二つの条件を導入しよう。

(C) $\exists R_0 \geqq 1$, $\exists C_0 \geqq 0$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \log T(rs)/(1+s^2)\,ds \leqq \log T(R_0 r) + C_0 \quad (r \gg 1).$$

(C*) $\exists R_1, R_2$ s.t. $R_0^2 < R_1 < R_2$ （R_0 は (C) の R_0）

$$T(R_1 r)\,T(r/R_2)\,/\,T(r)^2 \text{ が有界}.$$

<u>注意</u> (C*) は以下の (C**) におきかえてもよい。

(C**) $T(r)$ に同等な $\tilde{T}(r)$ があって次の条件をみたす：

$\tilde{T}(r)$ は正，$r>0$ の錐近傍に解析的に拡張できて，$\log \tilde{T}(e^t)$ は凸 かつ 上の錐近傍内で

$\exists R_0' \geqq 1$, $\exists C_0' \geqq 0$, $|\tilde{T}(z)| \leqq \tilde{T}(R_0'|z|) + C_0'$

が成り立つ。

<u>命題</u> (L. Carleson [4], L. Boutet de Monvel and P. Krée [3].)

（仮定2 はもちろんあるとして）可微分条件 (D.1)，及び (C) と (C*) （又は (C**)）を仮定する。数列 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ がある $R>0$, $C>0$ に対して $|c_n| \leqq C R^n M_n$ $(n \geqq 0)$ をみたすとしよう。このとき $\left(\frac{d}{dt}\right)^n g(0) = c_n$ をみたす $B\{M_n\}(\mathbb{R})$ の元 $g(t)$ が存在

する。更に $g(t)$ は実軸のある錐近傍に解析的に拡張され、ある $R_1>0$, $C_1>0$ により $|D_\tau^n g(\tau)| \le C_1 R_1^n M_n$ をそこでみたす。

この命題の系として次の定理をうる。

定理 4.2.（Formal symbol から true symbol の構成）$\{n!M_n\}$ に (C), (C^*)（又は (C^{**})）と仮定する。

i) 分離条件 (S.1) を $\{M_n\}$ に仮定しよう。$S^m[M_n]$ の任意の元 $\sum p_i(x,\xi)$ に対して $p \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i$ となる $S^m[M_n]$ の元 $p(x,\xi)$ がある。

ii) 弱分離条件 (W.S.1) を $\{M_n\}$ に仮定しよう。$S^m[M_n]$ の任意の元 $\sum p_i(x,\xi)$ に対して $p^1(x,\xi)$, $p^2(x,\xi)$ が S^m に存在して次の評価をみたす。

- $\{L_n\}$ を (C.D) をみたすようにとると、それに応じて $p^1(x,\xi)\in S^m$ があって $\exists R>0$, $\forall N\in \mathbb{Z}_+$, $\exists C_N$, $\exists r_N>0$

$$\left|\left(p^1(x,\xi) - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x,\xi)\right)^{(\beta)}_{(\alpha)}\right| \le C_N R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} L_{|\beta|} |\xi|^{-N-|\beta|}$$
for $(x,\xi)\in \mathbb{R}^l \times \{|\xi|\ge r_N\}$.

- $\exists R>0$, $\exists r_0>0$, $\forall N\in \mathbb{Z}_+$ $\forall \alpha,\beta\in \mathbb{Z}_+^l$ $\exists C_\alpha>0$

$$\left|\left(p^2(x,\xi) - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(x,\xi)\right)^{(\beta)}_{(\alpha)}\right| \le C_\alpha R^N M_N \beta! \, |\xi|^{-N-|\beta|}$$
for $(x,\xi)\in \mathbb{R}^l \times \{|\xi|\ge r_0\}$.

注意　ii) の p^2 は命題によらず、cutoff function を用いてつくる。

さて、上の定理において、$\{n!M_n\}$ が (C), (C^*)（又は (C^{**})）を満たすと仮定したが、実はこの二条件はなかなか検証しにくい。（かなり広い $\{M_n\}$ に対して成り立っていると思われるのだが。）

そこで、定義 3.1 及び 4.3 のあとで注意したように、定義中の r_0 を $d\,\Theta(j+|\beta|)$, $d\,\Theta(N+|\beta|)$ におきかえたもの(これらを"ξ に関して pseudo-analytic である"という)を採用すれば定理 4.2 の i) と ii) の $p'(x,\xi)$ の存在は 条件 (C), (C*) 等なしに pseudo-analytic な cutoff functions を用いて示せる。もちろん i) における $p(x,\xi)$ も ξ に関して pseudo-analytic になるのはいうまでもない。定理 4.2 の ii) はつまらないとも見えるが、分離条件 (5.1) は強く、これをみたす $\{M_n\}$ からつくられる ul. d. spaces は あるorderの Gevrey class の subclass となっているから、どの order の Gevrey class よりも広い class を考えたいときにはこれでも手がかりである。

なお定理 4.2 の証明は L. Boutet de Monvel and P. Krée [3], L. Boutet de Monvel [2] と同様にしてできる。ξ に関して pseudo-analytic の場合には F. Treves [26], S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6] と同様にしてできる。

定理 4.2 を使って性質 IV を示そう。まず $S^{-\infty}[M_n]$ について。

<u>定理 4.3.</u> (Algebra of $S^{-\infty}[M_n]$.) $\{M_n\}$ に (D.1) を仮定する。

i) $S^{-\infty}[M_n]$ は star algebra を成す。

ii) $S[M_n]$ と $S^{-\infty}[M_n]$ の元の積 及び $S^{-\infty}[M_n]$ と $S[M_n]$ の元の積 は $S^{-\infty}[M_n]$ に属する。

<u>注意 1.</u> この定理は 定理 4.2 と無関係に $S^{-\infty}[M_n]$ と $S[M_n]$ 内部で

閉じた証明ができる。

注意2. $\{M_n\}$ が (D.1) をみたさないときは、i) においては積や formal adjoint は $\mathcal{S}^{-\infty}[M_{n+l_0}]$ に属し、ii) においては、積は $\mathcal{S}^{-\infty}[M_{n+l_0+m_0}]$ に属する。ここに $l_0 = 2([\frac{l}{2}]+1)$, $m_0 = \max\{m, 0\}$.

〃 δ 〃 δ　$\mathcal{S}[M_n]$ が star algebra を成すことを示す。

定理4.4. $\{M_n\}$ に条件 (R) と (S.1) を仮定する。

1) $P(x,D)$ は $\mathcal{S}^{m_1}[M_n]$ に、$Q(x,D)$ は $\mathcal{S}^{m_2}[M_n]$ に属するとしよう。このとき $P(x,D)\,Q(x,D)$ は mod $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ で $\mathcal{S}^{m_1+m_2}[M_n]$ に属し、その表象から $\overbrace{\mathcal{S}^{-\infty}}^{\text{mod の}}$ の表象を引いた $r(x,\xi)$ は次の漸近展開をもつ。

$$(*)\quad r \underset{[M_n]}{\sim} \sum r_i \ , \qquad r_i = \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)} q_{(\alpha)} \ .$$

更に $p \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i$, $q \underset{[M_n]}{\sim} \sum q_i$ であれば次も成り立つ。

$$(**)\quad r \underset{[M_n]}{\sim} \sum \tilde{r}_i \ , \qquad \tilde{r}_i = \sum_{j+k+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} p_j^{(\alpha)} q_{k(\alpha)} \ .$$

2) $P(x,D)$ が $\mathcal{S}^m[M_n]$ に属するとしよう。このとき P の formal adjoint $P^*(x,D)$ も $\mathcal{S}^m[M_n]$ に mod $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ で属し、その表象から mod の $\mathcal{S}^{-\infty}$ の表象を引いた表象 $s(x,\xi)$ は次の漸近展開をもつ。

$$(*')\quad s \underset{[M_n]}{\sim} \sum s_i \ , \qquad s_i = \sum_{|\alpha|=i} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \bar{p}^{(\alpha)}_{(\alpha)} \ .$$

更に $p \underset{[M_n]}{\sim} \sum p_i$ であれば次も成り立つ。

$$(**')\quad s \underset{[M_n]}{\sim} \sum \tilde{s}_i \ , \qquad \tilde{s}_i = \sum_{j+|\alpha|=i} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \bar{p}^{(\alpha)}_{j(\alpha)} \ .$$

定理4.4の証明は i)について (★) あるいは (★★) が成り立つことを見込して定理4.2により先にそれが成り立つ $S(x,\xi)$ をつくってしまう。あとは $S(x,\xi)$ と $\sigma(PQ)$ の差が $S^{-\infty}[M_n]$ に属することを示せばよい。なお (★) あるいは (★★) の右辺が $S[M_n]$ に入るのは定理3.1による。なお、定理3.1 i) においては条件(R)や $C=1$ であることは必要ない。ii)についても同様である。証明の詳細は L. Boutet de Monvel and P. Krée [3], K. Taniguchi [24] あるいは F. Treves [26], S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6] と同様である。

§5. 性質IV再考.

§4での性質IVの考察では、性質VIIにあたる定理4.2を経由したので、分離条件を必要とした。もちろん、今のところ分離条件の導入はテクニカルな~~要~~請であって本質的かどうか不明だが、少くとも今までに知られている true symbol の構成法においては手続上それは避けられない。他方、$S[M_n]$ 内部の性質IVにVIIを用いるのはもう一つ納得できない。もっとも、性質IVといっても、われわれは漸近展開と両立する symbol を目ざしているから(具体的には定理4.4の (★) (★★) あるいは (★′) (★★′)) 純粋に性質IVが作用素固有の性質とも言えないかもしれない。実際、(★) (★★) (★′) (★★′) を放棄すれば、表象の x に関する analyticity

は一挙に C^∞ でよくなり star algebra を成すことは容易に示せる。この際 定理4.1, 4.3 はやはり成り立つ。(K. Taniguchi [24] を見られたい。)

少くとも (★), (★') を期待するかぎり表象の ξ に関する analyticity の要請は止むをえないように見える。他方、積の表象 $\sigma(PQ) = \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-\sqrt{-1}\,y\cdot\eta}\, p(x,\xi+\eta)\, q(x+y,\xi)\, dy\, đ\eta$ において p.15 に指摘したように $\xi+\eta\sim 0$ のあたりが $\sigma(PQ)\in S[M_n]$ となることをさまたげる要素を生み出している。そこで、上のηの積分を $\xi+\eta\sim\xi$ とそうでない部分に分けると、後者は $S^{-\infty}[M_n]$ に属することがわかる。したがって $\sigma(PQ)$ の本質的部分は $\varepsilon>0$ を任意にとると $\langle\eta\rangle\le\varepsilon\langle\xi\rangle$ の積分領域に含まれることがわかる。われわれは当然 $\langle\eta\rangle\le\varepsilon\langle\xi\rangle$ と $\langle\eta\rangle>\varepsilon\langle\xi\rangle$ に分けたいのだが、このためにはどうしても(ξにdependした) cut-off function が必要となる。しかしこれは決して analytic function ではとれない。われわれとしては pseudo-analyticity に活路を見いだすしかないように思われる。しかしながら、これでもなお難点がのこる。cutoff function として用いる函数は ξ に関して微分するごとに ξ の order が一つ下がってかつ analytic 評価に近いものがないといけない。しかし、pseudoanalytic fn による cutoff では n に応じて ξ の位置が変わるにしても k ($\le n$) 階の微分が $C(Rn)^k\langle\xi\rangle^{-k}$ でしか

おさえられない。具体的にのべよう。次のような函数がつくれる。(たとえば S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto [6] の true symbol の構成に用いた cutoff function を modify する)

$$\chi(\eta;\xi) = \begin{cases} 0 & |\eta| > {}^{3}b|\xi| \\ 1 & |\eta| < {}^{3}a|\xi| \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2l}) \qquad (0<b<a<1)$$

$$\exists R>0,\ \exists C>0 \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^l$$

$$|D_\eta^\alpha D_\xi^\beta \chi(\eta,\xi)| \begin{cases} \le C R^{|\alpha|+|\beta|}\, n^{|\beta|} \quad \textcircled{H}(n)^{-|\beta|} \\ \qquad d_1 \textcircled{H}(n) \le |\xi| \le d_2 \textcircled{H}(n) \\ = 0 \quad \text{otherwise} \qquad (|\beta|>0). \end{cases}$$

ここに R, C, d_1, d_2 は n のとり方によらない。

ここで問題になるのは n^k と $R_0^k k!$ との差である。前者は(kをfixすると) n と共に増大し、後者は定数である。その比は $k=\frac{n}{R_0}$ のとき $R_0^{(\frac{1}{R_0})n}$ である。これを解消するのはなかなか困難である。思いつくのは $Os\text{-}\iint e^{-\sqrt{-1}y\cdot\eta} p(x,\xi+\eta)\chi^{(\alpha,\beta)}(\eta;\xi)\,dy\,d\eta$ において y について部分積分して $|\eta|^{-1}$ をかせぐことである。これにより $\textcircled{H}(n)^{-1}$ が生みだせるが、固定された k_0 で $\textcircled{H}(n)^{-k_0}\cdot R_0^{\frac{1}{R_0}n} \le C_0$ となるためには $\liminf\limits_{n\to\infty} \log M_n/n^2 > 0$ が必要で、これは弱分離条件をみたす class を排除してしまう。というわけで今のところ (★), (★) を成り立たせる、Gevrey class より広い class の理論で、納得のいくものはできていない。

<u>注意</u>. われわれは $S[M_n] \equiv S_{1,0}[M_n]$ を考えているが、これを $\bigcap_{\varepsilon>0} S_{1-\varepsilon,0}[M_n]$ に譲歩すれば、$S^{-\infty}[M_n]$ もそれに応じて変更することによって、$\underbrace{\text{上の cut-off fn で algebra になることが示せる}}_{(\liminf_{n\to\infty}(\log M_n)/n\log n = \infty \text{ の仮定の下に})}$。

§6. 性質 V について.

最後に性質 V が成り立つための必要十分条件を与えよう。

<u>定理 6.1.</u> 1) もし、$\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元が $\mathcal{E}'\{M_n\}$ を $\mathcal{E}\{M_n\}$ に写すならば分離条件が成り立たなければならない。

2) 逆に分離条件があれば、$\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元は、$\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}$ から $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ へ有界である。(したがって $\mathcal{E}'\{M_n\}$ から $\mathcal{E}\{M_n\}$ へも有界である。)

<u>注意.</u> 定義 4.2 注意 3 におけるように C_β を $CR^{|\beta|}\beta!$ にとってもなおかつ 1) が成り立つ。

特異性の伝播を研究する際にしばしば解れを $\mathcal{E}'$ からとってくる。その場合には性質 V′ でも有効である。

<u>定理 6.2.</u> 1) もし、$\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元が $\mathcal{D}'_{L^2}$ を $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ へ写すか、$\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}$ を $\mathcal{D}^{\infty}_{L^2}$ へ写すならば $\{M_n\}$ は可微分条件をみたさねばならない。

2) 可微分条件の下に $\mathcal{S}^{-\infty}[M_n]$ の任意の元は $\mathcal{D}'_{L^2}$ から $\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}$ へ(したがって $\mathcal{E}'$ から $\mathcal{E}\{M_n\}$ へ)、$\mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}$ から $\mathcal{D}^{\infty}_{L^2}$ へ(したがって $\mathcal{E}'\{M_n\}$ から $\mathcal{E}$ へ)有界である。

<u>注意</u> 今度も上の注意と同じことが成り立つ。

証明であるが、両定理とも 1) については対偶を例を構成することで示す。2) は容易である。

文 献 表

[1] M.S. Baouendi, C. Goulaouic and G. Métivier,
J. Diff. Eq. vol 48 (1983) 227-240.

[2] L. Boutet de Monvel, Ann. Inst. Fourier vol 22 (1972) 229-268.

[3] L. Boutet de Monvel and P. Krée, 同上. vol 17 (1967) 295-323.

[4] L. Carleson, Math. Scand. vol 9 (1961) 197-206.

[5] C.H. Ching, J. Diff. Eq. vol 11 (1972) 436-447.

[6] S. Hashimoto, T. Matsuzawa and Y. Morimoto
Comm. P.D.E.

[7]. L. Hörmander, Amer. Math. Soc. Simp. Pure Math vol 10 (1967) 138-183.

[8] 同上, Comm. Pure Appl. Math. vol 24 (1971) 671-704.

[9] K. Kajitani, Publ. RIMS. Kyoto U. vol 15 (1979) 519-550.

[10] J.J. Kohn and L. Nirenberg, Comm Pure Appl. Math. vol 18 (1965) 269-305.

[11] H. Komatsu, J. Math. Soc. Japan vol 19 (1967) 366-383.

[12]. 同上, J. Fac. Sci. U. Tokyo, Sec. I.A., vol 20 (1973) 25-105.

[13]. 同上, Ultradistributions, IV, (to appear).

[14]. 同上, Proc. Japan Acad. vol 55, Ser. A, (1979) 69-72

[15] 同上, 同上 vol 56, Ser A, (1980) 137-142.

[16] H. Kumano-go, J. Fac. Sci. U. Tokyo, Ser I.A. vol 17 (1970) 31-50.

[17] 同上, 擬微分作用素, 岩波書店 (1974). 1,3章

[18] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, Régularisation des suites,

Applications, Gauthier-Villars (1952) I, IV, VI 章.

[19] W. Matsumoto, Sém. Eq. D. P. hyperb. holon. U. Paris VI (1979-1980).

[20] 同上, C. R. Acad. Sci. Paris, vol 292 (1981) 621-623.

[21] 同上, Characterization of the separativity of ul. d. classes, (to appear in J. Math. Kyoto U.)

[22] T. Nishitani, J. Math. Kyoto U. vol 18 (1978) 509-521.

[23] W. Rudin, J. Math. Mech. vol 11 (1962) 797-809.

[24] K. Taniguchi, Fourier integral operators in Gevrey class in $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for a hyperbolic operator, (to appear).

[25] 同上, A calculus of Fourier integral operators with analytic symbols and fundamental solution of hyperbolic operators, I, (unpublished).

[26] F. Treves, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, vol 1, Pseudodifferential operators, Plenum Press (1980) 5章.

[27] L. R. Volevič, Trudy Moscow Math. Obšč. vol 24 (1971) 43-68, 英訳: Trans. Moscow Math Soc. vol 24 (1971) 43-72.